Transitividad robusta de endomorfismos singulares. Un mapa de $\mathbb{T}^n$ que es C^2 robustamente transitivo pero no es C^1 robustamente transitivo.

Autor: Juan Carlos Morelli Ramírez
Orientador: Dr. Jorge Iglesias

2 de julio de 2019

1. Antecedentes

Cuando pensamos en las propiedades dinámicas de un sistema vienen a nosotros casi inevitablemente en primer lugar los conceptos de *estabilidad* para un mapa y *robustez* para una propiedad. Si bien estos conceptos pueden definirse en forma precisa en términos matemáticos, informalmente podemos decir que la estabilidad implica que mapas cercanos tienen dinámicas iguales; y que la robustez de una propiedad implica que mapas cercanos la satisfacen. La importancia de la estabilidad es evidente; la de la robustez está en que una propiedad robusta es capaz de resistir a las perturbaciones.

Este trabajo en particular se centra en el estudio de la robustez de la transitividad, entendiendo por *transitividad* la existencia de un punto con órbita a futuro densa.
En realidad, el análisis que buscamos hacer no es en si nuevo ya que se conocen una buena cantidad de resultados concernientes a la transitividad robusta; la novedad está en que se ataca una clase particular de mapas, los endomorfismos singulares, sobre los cuales poco o nada se sabe. Para ordenar un poco las ideas, se listan a continuación los resultados conocidos más relevantes sobre este tema.

Comenzamos con el caso más estudiado: la transitividad robusta en el contexto de difeomorfismos. El conjunto de resultados conocidos provee una imagen bastante completa del comportamiento de estos mapas. Comenzando por las superficies, para las cuales Mañé prueba en [M] que la transitividad robusta implica que la variedad es $\mathbb{T}^2$ y el difeomorfismo es Anosov, hasta el caso de las variedades de $dim(M) = n$ donde [BDP] prueban que todo difeomorfismo robustamente transitivo implica la existencia de splitting dominado de los espacios tangentes (que es una forma débil de hiperbolicidad). Luego aparece la transitividad robusta de endomorfismos regulares (invertibles local pero no globalmente) los cuales si bien han sido menos estudiados que los difeomorfismos, [LP] prueban que la expansión de volumen es condición necesaria (no suficiente) para que un endomorfismo en cualquier dimensión sea C^1-robustamente transitivo. Por último, la transitividad robusta de mapas singulares (conjunto crítico no vacío) que es, por mucho, el caso menos estudiado; tanto así que hasta 2013 no se había escrito nada al respecto. Fue en ese año cuando [BR] construyeron el primer ejemplo de un mapa singular C^1 robustamente transitivo. El segundo ejemplo apareció en 2016 cuando [ILP] construyen un mapa C^1-robustamente transitivo con conjunto crítico es persistente. Nada más se sabía que estos dos ejemplos hasta ese momento, no obstante, últimamente se ha logrado avanzar en el área habiendo aparecido algunos resultados importantes para endomorfismos singulares en superficies. En [LR1] se prueba que la hiperbolicidad parcial es una condición necesaria para la transitividad robusta de estos endomorfismos. En cuanto al *state of the art* del tópico, a principios de este mismo año [LR2] prueban que las únicas superficies que admiten endomorfismos singulares persistentes y robustamente transitivos son $\mathbb{T}^2$ y la botella de Klein, y que todo endomorfismo de este tipo está en la clase de homotopía de un mapa lineal con al menos un valor propio de módulo mayor que uno.

En cuanto a este trabajo, mencionamos que la construcción hecha en [ILP] permite deducir la existencia de un endomorfismo de $\mathbb{T}^2$ con conjuntro crítico persistente y que es robustamente transitivo en la topología C^2 pero no lo es en la topología C^1. Este resultado, que puede verse en [IP], es el punto de partida para el resultado aquí presentado. Veremos que la construcción efectuada por [IP] en la superficie $\mathbb{T}^2$ puede llevarse a cabo en $\mathbb{T}^n$ utilizando las mismas técnicas lo que se traduce en un aporte nuevo al estudio de la transitividad robusta de endomorfismos singulares.

2. Programa

A partir de una matriz de coeficientes enteros mayores que uno se construye un endomorfismo de $\mathbb{T}^n$ que tiene conjunto crítico persistente y admite conos inestables. Las características geométricas del conjunto crítico permiten elegir un punto distinguido donde perturbar a fin de obtener un nuevo mapa que colapsa un abierto en un segmento invariante por lo que no es C^1 transitivo. Finalmente, utilizando los conos, probaremos que el mapa es transitivo en la topología C^2 siguiendo (iterando) curvas aceleradas que viajan dentro de ellos.

Referencias

[M] R. Mañé. An ergodic closing lemma. Annals of Math 116. 1982.

[BDP] C. Bonatti, L.J. Díaz, E. Pujals. A C^1 generic dichotomy for diffeomorphisms: weak forms of hyperbolicity or infinitely many sinks or sources. Ann. of Math (2) 158. 2003.

[LP] C. Lizana, E. Pujals. Robust transitivity for endomorphisms. Ergod. Th. Dynam. Sys. 33 2013.

[BR] P. Berger, A. Rovella. On the inverse limit stability of endomorphisms. Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire , 30. 2013.

[ILP] J. Iglesias, C. Lizana and A. Portela. Robust transitivity for endomorphisms admitting critical points. Proc. Amer. Math. Soc. 144, no. 3. 2016.

[LR1] C. Lizana, W. Ranter. Topological obstructions for robustly transitive endomorphisms on surfaces. arXiv:1711.02218 2017.

[IP] J. Iglesias, A. Portela. An example of a map which is C^2 robustly transitive but not C^1 robutstly transitive. arXiv: 1606.07048 2018.

[LR2] C. Lizana, W. Ranter. New classes of C^1 robustly transitive maps with persistent critical points. arXiv:1902.06781 2019.